Автоматика и телемеханика, № 7, 2024

© 2024 г. В.Ю. КАЛАЧЕВ, канд. экон. наук (vkalachev@sfedu.ru),
Г.А. УГОЛЬНИЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук (gaugolnickiy@sfedu.ru),
А.Б. УСОВ, д-р техн. наук (abusov@sfedu.ru)
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

ДИНАМИЧЕСКИЕ КООПЕРАТИВНО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ГОСУДАРСТВЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ИННОВАЦИЙ В УНИВЕРСИТЕТАХ

Построена и в кооперативной постановке исследована двухуровневая динамическая дискретная теоретико-игровая модель управления внедрением инноваций в университетах на основе олигополии Курно. В качестве субъектов управления рассматривается государство (Центр) и конкурирующие между собой университеты (агенты). Решение ищется в программных стратегиях. Агенты вкладывают средства в разработку новых электронных курсов, что рассматривается как их инновационные инвестиции. Центр выделяет агентам субсидии на внедрение инноваций. Исследован случай субсидий, зависящих от действий агента. Кооперативная игра описывается в форме характеристических функций Неймана–Моргенштерна, Петросяна–Заккура и Громовой–Петросяна. Исследование проводится численно, приведены результаты имитационных экспериментов.

Ключевые слова: кооперативные игры, характеристическая функция, имитационное моделирование, управление университетами.

DOI: 10.31857/S0005231024070074, **EDN:** XRKFQO

1. Введение

Различным аспектам математического моделирования инновационной деятельности посвящено значительное число работ, например [1–5]. В настоящей статье существенно используется два направления этих исследований. В [6] рассмотрена статическая теоретико-игровая модель инновационной олигополии Курно, в рамках которой исследуются эффекты конкуренции производителей на рынке инновационного продукта, ограниченности емкости этого рынка и существования оптимального числа действующих на нем агентов, дополнительности инновационных технологий, конформного поведения агентов. В [7, 8] построены и исследованы динамические игровые модели олигополии Курно, в которой фирмы инвестируют в дифференциацию продукта. Проведен сравнительный анализ решений в программных и позиционных стратегиях, в частности сравнение индивидуально оптимального и коллективно оптимального поведения. В настоящей работе исследование процесса внедрения инноваций в университетах проводится в рамках авторского подхода [9–12]. В [9] построена двухуровневая модель согласования частных и общественных интересов при продвижении инноваций в организации. Реализованы алгоритмы построения равновесий в играх Гермейера и с использованием имитационного моделирования. В [11] эта модель модифицирована с учетом вида функций из [6–8] в дифференциальной, а в [12] – в разностной формах. В [10] задачи мотивации сотрудников организации к продвижению инноваций путем распределения вознаграждения формализованы как кооперативные дифференциальные игры, при построении которых использованы три различные характеристические функции: классическая функция Неймана–Моргенштерна, функции Петросяна–Заккура и Петросяна–Громовой. Во всех трех случаях в качестве решения игры использован вектор Шепли, компоненты которого найдены аналитически и численно. Настоящая статья комплексно развивает работы [9–12] с использованием результатов публикаций [6–8]. Ее вклад заключается в следующем:

– предложена двухуровневая модель управления продвижением инноваций в университетах (на примере разработки электронных учебных курсов) в виде разностной иерархической игры с информационными регламентами Γ_{1t} и Γ_{2t};

– исходя из этой некооперативной игры построена кооперативная игра на основе характеристических функций Неймана–Моргенштерна, Петросяна–Заккура и Петросяна–Громовой;

– для всех указанных кооперативных игр вычислен вектор Шепли, проведен сравнительный анализ результатов и сформулированы рекомендации по управлению.

2. Постановка задачи

Пусть имеется несколько конкурирующих по Курно университетов, которые выступают в роли агентов. Агенты разрабатывают электронные учебные курсы для последующей продажи. Вложения в совершенствование этих курсов рассматриваются как инновационные инвестиции. В роли ведущего (Центра) выступает государство в лице своих уполномоченных органов управления (в данном случае экономического). Модель в случае n агентов записывается в виде:

– функционал выигрыша Центра

$$J_0 = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left\{ \gamma \bar{x}_t - \sum_{i=1}^{n} I(x_{it}) s_{it}(x_{it}) \right\} + \delta^T y_T \to \max; \tag{1}$$

– ограничения на управления Центра

$$\sum_{i=1}^{n} s_{it}(x_{it}) \leqslant S_t; \quad s_{it}(x_{it}) \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T; \tag{2}$$

– функционалы выигрыша агентов [6]

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left\{ (D - \alpha \bar{x}_t) x_{it} - \frac{x_{it}^2}{2\left(r_i + \beta \sum\limits_{j \neq i} r_j I(x_{jt}) \right)} - (c_i - s_{it}) I(x_{it}) \right\} \to \max; \tag{3}$$

– ограничения на управления агентов

$$0 \leqslant x_{it} \leqslant x_{\max}; \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T; \tag{4}$$

– уравнение динамики

$$y_{t+1} = y_t + \sum_{i=1}^{n} k_i x_{it} - m y_t; \quad y(0) = y_0. \tag{5}$$

Здесь J_0, J_i – функционалы выигрыша Центра и агентов соответственно; $s_{it}(x_{it})$ – субсидия Центра i-му агенту. Именно, центр выбирает значения параметров θ_{it} таким образом, что субсидия для университета i будет равняться $s_{it} = \theta_{it} x_{it}$; S_t – годовой бюджет Центра; x_{it} – объем выпуска инновационного продукта i-м агентом; $\bar{x}_t = \sum_{i=1}^{n} x_{it}$; r_i – тип агента (эффективность применяемых им технологий); D, $x_{\max}$, $\gamma > 0$; $\alpha, \beta \geqslant 0$ – параметры модели; $\delta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования; c_i – постоянные издержки агента; $I(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Таким образом, смысл первого слагаемого в (3) – выручка от реализации i-м агентом произведенной им продукции в объеме x_{it}, смысл второго слагаемого – квадратичные производственные затраты типа Кобба–Дугласа i-го агента, зависящие от действий агента (x_i) и от эффективности технологий всех агентов (r), смысл третьего слагаемого – издержки, возникающие при использовании новой технологии; y_t – общий инновационный уровень системы образования; m – коэффициент снижения этого уровня при отсутствии инновационных продуктов; k_i – коэффициент влияния i-го продукта; y_0 – начальное значение инновационного уровня; T – период рассмотрения.

Ниже исследуется случай линейных функций субсидий Центра i-му агенту: $s_{it}(x_{it}) = \theta_{it} x_{it}$; $i = 1, \ldots, n$, где оптимизация критерия (1) проводится по величинам $\{\theta_{it}\}_{i=1}^{n}$. Предполагается, что в первом приближении линейная зависимость достаточно хорошо описывает стимулирование инновационной активности агентов.

Исследование модели (1)–(5) возможно с различных точек зрения. С точки зрения Центра возникает разностная иерархическая игра, в которой используется информационный регламент игр Гермейера Γ_{1t} или Γ_{2t} [13]. Для агентов разыгрывается неантагонистическая игра в нормальной форме, в которой строится равновесие Нэша. В обоих случаях предполагается, что Центр и агенты используют программные стратегии. Центр может предвидеть оптимальные ответы агентов, которые выбирают свои оптимальные стратегии как равновесия Нэша в игре (3)–(5) при фиксированных управлениях Центра.

В игре Гермейера Γ_{1t} Центр, предвидя оптимальные ответы агентов, под которыми понимается множество равновесий Нэша в игре (3)–(4), решает задачу (1), (2), (5). При наличии нескольких равновесий Нэша в игре агентов используется принцип гарантированного результата Гермейера.

В игре Гермейера Γ_{2t} Центр выбирает программные стратегии с обратной связью по управлению и сообщает их агентам. Если агенты не сотрудничают с Центром, то используется стратегия наказания Центром агентов. Выигрыш агентов в этом случае не превышает их гарантированный выигрыш. Если же агенты выбирают стратегии, выгодные Центру, то он использует стратегию поощрения, делая выигрыш агентов больше гарантированного. При этом, зная механизм управления Центра, агенты выбирают свои действия x_{it} как равновесие Нэша в игре (3)–(4). Так как Центр может предвидеть оптимальную реакцию агентов, то он выбирает свои стратегии, решая задачу (1)–(2), (5) на множестве равновесий Нэша в игре (3)–(4) с дополнительным требованием, чтобы при побуждении выигрыш агентов был больше гарантированного. Тогда ϵ-оптимальная гарантирующая стратегия Центра вместе с оптимальным ответом агентов (равновесием Нэша) образует решение иерархической игры Гермейера Γ_{2t}.

Подробно случаи некооперативного поведения Центра и агентов в иерархической постановке при разных информационных регламентах рассмотрены в [10, 12]. Ниже исследование проводится в предположении кооперации Центра и всех агентов. Тогда соотношения (1)–(5) описывают динамическую кооперативную игру Центра и агентов.

Способом описания кооперативных игр является использование характеристической функции, которая определяет выигрыш всех возможных коалиций (подмножеств игроков) [14]. Кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара (M, v), где $M = \{0, 1, \dots, N\}$ – множество всех игроков, $v : 2^M \to R$ – характеристическая функция, действующая из множества всех коалиций во множество вещественных чисел.

При таком подходе наиболее часто используется характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [15]. Однако в экономических и иных приложениях теории кооперативных игр отнюдь не всегда между коалицией и антикоалицией возникает антагонистическая игра. Поэтому в последнее время получили распространение и другие характеристические функции, например функции Петросяна–Заккура [16] и Громовой–Петросяна [17]. Ниже исследование проводится в случае Центра и двух агентов: таким образом, рассматриваются динамические кооперативные игры трех лиц. Соответственно, возможны коалиции следующих типов: только Центр; один агент; два агента; Центр и агент; максимальная коалиция трех игроков.

3. Кооперативная игра в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна

Характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [15] определяет выигрыш любой коалиции S как значение антагонистической игры этой коалиции против антикоалиции $M \setminus S$. Характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна для коалиции из одного игрока имеет вид

– одного Центра

$$v(\{0\}) = \max_{\theta_{1t},\theta_{2t}} \min_{x_{1t},x_{2t}} J_0(\theta_{1t},\theta_{2t},x_{1t},x_{2t}) = \delta^T y_0 (1-m)^T,$$

– одного агента

$$v(\{1\}) = \max_{x_{1t}} \min_{x_{2t},\theta_{1t}} J_1(\theta_{1t},x_{1t},x_{2t}); \;\; v(\{2\}) = \max_{x_{2t}} \min_{x_{1t},\theta_{2t}} J_2(\theta_{2t},x_{1t},x_{2t}).$$

Учитывая линейность J_1 по x_{2t} и J_2 по x_{1t} , получим, что

$$v(\{1\}) = \max_{x_{1t}}(\min(J_1(0,x_{1t},x_{\max}); J_1(0,x_{1t},0);$$
$$v(\{2\}))) = \max_{x_{2t}}(\min(J_2(0,x_{\max},x_{2t}); J_2(0,0,x_{2t}))).$$

Вычислим эти два значения характеристической функции. Отметим, что агенты близорукие, т.е. их функционалы выигрыша можно переписать в виде

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t J_{it}; \;\; i = 1,2;$$

$$J_{it} = (D - \alpha \bar{x}_t) x_{it} - \frac{x_{it}^2}{2\left(r_i + \beta \sum\limits_{j \neq i} r_j I(x_{jt})\right)} - (c_i - s_i) I(x_{it}),$$

и оптимальное значение функционалов выигрыша агентов не зависит от переменной состояния, т.е. от решения уравнения (5). Поэтому от оптимизации функционала (3) для i-го агента можно перейти к оптимизации T функций выигрыша вида

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t J_{it}; \;\; J_{it} \to \max; \;\; t = 1,\dots,T; \;\; i = 1,2. \tag{6}$$

Максимум при этом берется по одной переменной x_{it}. В результате каждый агент решает T задач оптимизации (6) с ограничениями (4). Для i-го агента максимальный выигрыш достигается при $x_{it} = 0$ или при $x_{it} > 0$. В случае $x_{it} = 0$ выигрыш агента равен нулю.

Рассмотрим случай $x_{it} > 0$. Используя необходимое условие экстремума функции одной переменной, получим уравнение для определения стационарных управлений ($j = 1$ если $i = 2$; $j = 2$ если $i = 1$):

$$\frac{\partial J_{it}}{\partial x_{it}} = D - \alpha x_{jt} - 2\alpha x_{it} - \frac{x_{it}}{r_i + \beta r_j I(x_{jt})} + \theta_{it} = 0. \tag{7}$$

Заметим, что
$$\frac{\partial^2 J_{it}}{\partial x_{it}^2} = -2\alpha - \frac{1}{r_i + \beta r_j I(x_{jt})} < 0.$$
Следовательно, (7) определяет точку максимума функции J_{it} и при $x_{it} > 0$ оптимальное управление агента задается формулой
$$x_{it}^{(1)} = \frac{(D + \theta_{it} - \alpha x_{jt})(r_i + \beta r_j I(x_{jt}))}{2\alpha(r_i + \beta r_j I(x_{jt})) + 1}.$$

Тогда
$$v(\{1\}) = \max(0; \min(J_1(0, x_{1t}^0, x_{\max}); J_1(0, x_{1t}^{00}, 0)));$$
$$v(\{2\}) = \max(0; \min(J_2(0, x_{\max}, x_{2t}^0); J_2(0, 0, x_{2t}^{00}))).$$

Если $(D + \theta_{1t})r_1/(2\alpha r_1 + 1) < x_{\max}$, то
$$x_{1t}^{00} = (D + \theta_{1t})r_1/(2\alpha r_1 + 1);$$
если $(D + \theta_{2t})r_2/(2\alpha r_2 + 1) < x_{\max}$, то
$$x_{2t}^{00} = (D + \theta_{2t})r_2/(2\alpha r_2 + 1);$$
если $(D + \theta_{1t} - \alpha x_{\max})(r_1 + \beta r_2)/(2\alpha(r_1 + \beta r_2) + 1) < x_{\max}$ и $D + \theta_{1t} > \alpha x_{\max}$, то
$$x_{1t}^0 = (D + \theta_{1t} - \alpha x_{\max})(r_1 + \beta r_2)/(2\alpha(r_1 + \beta r_2) + 1);$$
если $(D + \theta_{2t} - \alpha x_{\max})(r_2 + \beta r_1)/(2\alpha(r_2 + \beta r_1) + 1) < x_{\max}$ и $D + \theta_{2t} > \alpha x_{\max}$, то
$$x_{2t}^0 = (D + \theta_{2t} - \alpha x_{\max})(r_2 + \beta r_1)/(2\alpha(r_2 + \beta r_1) + 1);$$
в противном случае – $x_1^0 = x_{\max}$; $x_2^0 = x_{\max}$; $x_1^{00} = x_{\max}$; $x_2^{00} = x_{\max}$.

Для коалиции из двух агентов:
$$v(\{1,2\}) = \max_{x_{1t}, x_{2t}} \min_{\theta_{1t}, \theta_{2t}} (J_1(\theta_{1t}, x_{1t}, x_{t2}) + J_2(\theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t})) =$$
$$= \max_{x_{1t}, x_{2t}} (J_1(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_2(0, x_{1t}, x_{2t})).$$

Тогда
$$v(\{1,2\}) = \sum_{t=1}^{T} v_t(\{1,2\}) = \sum_{t=1}^{T} \max_{x_{1t}, x_{2t}} (J_{1t}(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_{2t}(0, x_{1t}, x_{2t})),$$

и для определения стационарных точек получим систему двух уравнений
$$\frac{\partial v_t(\{1,2\})}{\partial x_{1t}} = D - 2\alpha \bar{x}_t = \frac{x_{1t}}{r_1 + \beta r_2} + \theta_{1t} = 0;$$
$$\frac{\partial v_t(\{1,2\})}{\partial x_{2t}} = D - 2\alpha \bar{x}_t = \frac{x_{2t}}{r_2 + \beta r_1} + \theta_{2t} = 0.$$

Ее решение имеет вид

$$x_{1t}^{000} = \frac{(D+\theta_{1t})(r_1+\beta r_2)}{2\alpha(r_1+r_2+\beta(r_1+r_2)+1)};$$

$$x_{2t}^{000} = \frac{(D+\theta_{2t})(r_2+\beta r_1)}{2\alpha(r_1+r_2+\beta(r_1+r_2)+1)},$$

при этом

$$\frac{\partial^2 v_t(\{1,2\})}{\partial x_{1t}^2} = -2\alpha - \frac{1}{r_1+\beta r_2} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 v_t(\{1,2\})}{\partial x_{2t}^2} = -2\alpha - \frac{1}{r_2+\beta r_1} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 v_t(\{1,2\})}{\partial x_{1t} x_{2t}} = -2\alpha < 0.$$

Следовательно, найдена точка максимума (x_{1t}^*, x_{2t}^*). Причем, если $x_{1t}^{000}, x_{2t}^{000} < x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{1t}^{000}, x_{2t}^{000});$$

если $x_{1t}^{000} \geqslant x_{\max}, x_{2t}^{000} < x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{\max}, x_2^{000});$$

если $x_{1t}^{000} < x_{\max}, x_{2t}^{000} \geqslant x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{1t}^{000}, x_{\max});$$

если $x_{1t}^{000}, x_{2t}^{000} \geqslant x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{\max}, x_{\max}).$$

Тогда $v(\{1,2\}) = \sum_{t=1}^{T} v_t(\{1,2\}) = \sum_{t=1}^{T} (\max(0, J_1(x_{1t}^*, x_{2t}^*)) + \max(0, J_2(x_{1t}^*, x_{2t}^*)));$

– коалиции одного агента и центра:

$$\begin{aligned} v(\{0,1\}) &= \max_{x_{1t},\theta_{1t},\theta_{2t}} \min_{x_{2t}} (J_1(\theta_{1t}, x_{1t}, x_{2t})) + J_0(\theta_{1t}, \theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t})) = \\ &= \max_{x_{1t}} \min_{x_{2t}} (J_1(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_0(0, 0, x_{1t}, x_{2t})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\{0,2\}) &= \max_{x_{2t},\theta_{1t},\theta_{2t}} \min_{x_{1t}} (J_2(\theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t})) + J_0(\theta_{1t}, \theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t})) = \\ &= \max_{x_{2t}} \min_{x_{1t}} (J_2(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_0(0, 0, x_{1t}, x_{2t})). \end{aligned}$$

Значения находятся численно путем перебора областей допустимых управлений (4) с некоторым шагом.

В случае коалиции обоих агентов и центра $v(\{0,1,2\})$ агенты и центр сообща решают задачу оптимального управления с функционалом выигрыша вида

$$J^C(x_{1t},x_{2t}) = \sum_{t=1}^{T}\delta^t\left\{\gamma\bar{x}_t + \sum_{i=1}^{2}\left((D-\alpha\bar{x}_t)x_{it} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{x_{it}^2}{2\left(r_i + \beta\sum\limits_{j\neq i} r_j I(x_{jt})\right)} - c_i I(x_{it})\right)\right\} + \delta^T y_T \to \max .$$

Его максимум ищется по функциям x_{1t}, x_{2t} с учетом (4), (5). Если управления всех агентов равны нулю, то выигрыш коалиции равен $\delta^T y_0(1-m)^T$. Если, наоборот, управления всех агентов не равны нулю, то при использовании агентами программных стратегий для нахождения максимума J^C применим дискретный принцип максимума Понтрягина [18]. Функция Гамильтона коалиции игроков имеет вид

$$H_T = \delta^t\left[\gamma\bar{x}_t + (D-\alpha\bar{x}_t)\bar{x}_t - \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{x_{it}^2}{2\left(r_i + \beta\sum\limits_{j\neq i} r_j I(x_{jt})\right)} - c_i\right)\right] +$$

$$+ \mu_{t+1}\left(\sum_{i=1}^{2}(k_i x_{it} - m y_t)\right),$$

где μ_{t+1} – сопряженная переменная. Из необходимого условия экстремума получим систему двух уравнений

$$\frac{\partial H_t}{\partial x_{1t}} = \delta^t\left(\gamma + D - 2\alpha(x_{1t}+x_{2t}) - \frac{x_{1t}}{r_1+\beta r_2}\right) + \mu_{t+1}k_1 = 0;$$
$$\frac{\partial H_t}{\partial x_{2t}} = \delta^t\left(\gamma + D - 2\alpha(x_{1t}+x_{2t}) - \frac{x_{2t}}{r_2+\beta r_1}\right) + \mu_{t+1}k_2 = 0,$$

а для определения сопряженной переменной – систему уравнений

$$\mu_t = (1-m)\mu_{t+1};\ \mu_T = \delta^T.$$

Следовательно, $\mu_t = (1-m)^{T-t}\delta^T$. Тогда

$$x_{1t}^0 = \frac{A_{1t}-B_{1t}}{2\alpha+1+1/(2\alpha(r_1+\beta r_2))};\ x_{2t}^0 = \frac{A_{2t}-B_{2t}}{2\alpha+1+1/(2\alpha(r_2+\beta r_1))},$$

где

$$A_{1t} = \gamma + D + k_2(1-m)^{T-t}\delta^{T-t};$$

$$B_{1t} = \left(2\alpha + \frac{1}{r_2+\beta r_1}\right)\left(\frac{\gamma+D}{2\alpha} + \frac{k_1(1-m)^{T-t}\delta^{T-t}}{2\alpha}\right);$$

$$A_{2t} = \gamma + D + k_1(1-m)^{T-t}\delta^{T-t};$$

$$B_{2t} = \left(2\alpha + \frac{1}{r_1+\beta r_2}\right)\left(\frac{\gamma+D}{2\alpha} + \frac{k_2(1-m)^{T-t}\delta^{T-t}}{2\alpha}\right).$$

Найденная пара (x_{1t}^0, x_{2t}^0) является точкой максимума функции Гамильтона при положительных управлениях. Действительно,

$$\frac{\partial^2 H_t}{\partial x_{1t}^2} = -\delta^t\left(2\alpha - \frac{1}{r_1+\beta r_2}\right) = E < 0; \quad \frac{\partial^2 H_t}{\partial x_{2t}^2} = -\delta^t\left(2\alpha - \frac{1}{r_2+\beta r_1}\right) = F < 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_t}{\partial x_{1t}\partial x_{2t}} = -2\alpha\delta^t = G < 0; \quad \Delta = EF - G^2 > 0; \quad E < 0.$$

Следовательно, максимум функции Гамильтона с учетом ограничений на управления (4) достигается в одной из точек

$$(x_{1t}^{**}, x_{2t}^{**}) = \\ = \left\{(x_{1t}^0, x_{2t}^0), (x_{1t}^0, 0), (0, x_{2t}^0), (0,0), (x_{\max}, x_{2t}^0), (x_{1t}^0, x_{\max}), (x_{\max}, x_{\max})\right\}. \tag{8}$$

Доказано следующее

Утверждение. Формулы (8) определяют аргументы функционалов выигрыша центра и агентов, дающие значение характеристической функции максимальной коалиции, т.е.

$$v(\{0,1,2\}) = J_0(0,0,x_1^{**},x_2^{**}) + J_1(0,x_1^{**},x_2^{**}) + J_2(0,x_1^{**},x_2^{**}).$$

4. Кооперативная игра в форме характеристической функции Громовой–Петросяна

Значение характеристической функции Громовой–Петросяна для коалиции S вычисляется в два этапа [17]. На первом находятся оптимальные управления игроков при кооперативном подходе (формулы (8), утверждение). В результате определяются стратегии всех членов рассматриваемой коалиции, и далее они меняться не будут. На втором этапе члены антикоалиции стремятся минимизировать суммарный выигрыш всех членов коалиции, меняя свои управления. В результате определяется значение характеристической функции на этой коалиции. Таким образом:

– для коалиции из одного центра

$$v(\{0\}) = \min(J_0(0,0,0,0); J_0(0,0,x_{\max},x_{\max}); J_0(0,0,0,x_{\max}); J_0(0,0,x_{\max},0);$$

– для коалиции из одного агента

$$v(\{1\}) = \min_{x_{2t},\theta_{1t}} J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, \theta_{1t}) = \min_{x_{2t}} J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, 0);$$

$$v(\{2\}) = \min_{x_{1t},\theta_{2t}} J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, \theta_{2t}) = \min_{x_{1t}} J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, 0);$$

(здесь и далее

$$\{x_{1t}^*, x_{2t}^*, \theta_{1t}^*, \theta_{2t}^*\} = \arg \max_{x_{1t},x_{2t},\theta_{1t},\theta_{2t}} (J_0 + J_1 + J_2)$$

и определяются формулой (8) и доказанным выше утверждением, причем $\theta_{1t}^* = \theta_{2t}^* = 0$);

– для коалиции одного агента и центра

$$v(\{0,1\}) = \min_{x_{2t}} (J_0(x_{1t}^*, x_{2t}, \theta_{1t}^*, \theta_{2t}^*) + J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, \theta_{1t}^*)) =$$
$$= \min_{x_{2t}} (J_0(x_{1t}^*, x_{2t}, 0, 0) + J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, 0));$$

$$v(\{0,2\}) = \min_{x_{1t}} (J_0(x_{1t}, x_{2t}^*, \theta_{1t}^*, \theta_{2t}^*) + J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, \theta_{2t}^*)) =$$
$$= \min_{x_{1t}} (J_0(x_{1t}, x_{2t}^*, 0, 0) + J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, 0));$$

– для коалиции обоих агентов

$$v(\{1,2\}) = \min_{\theta_{1t},\theta_{2t}} (J_1(x_{1t}^*, x_{2t}^*, \theta_{1t}) + J_2(x_{1t}^*, x_{2t}^*, \theta_{2t}) =$$
$$= J_1(x_{1t}^*, x_{2t}^*, 0) + J_2(x_{1t}^*, x_{2t}^*, 0);$$

– для коалиции обоих агентов и центра

$$v(\{0,1,2\}) = \max_{x_{1t},x_{2t}} J^C(x_{1t}, x_{2t})$$

и значение определяется аналогично значению характеристической функции Неймана–Моргенштерна для максимальной коалиции (утверждение).

5. Кооперативная игра в форме характеристической функции Петросяна–Заккура

Значение характеристической функции Петросяна–Заккура для коалиции S вычисляется в два этапа [16]. На первом предполагается, что все игроки равноправны и находятся их равновесные по Нэшу управления. Если таких равновесий несколько, то необходимо выбрать то, в котором выигрыш коалиции будет меньше. В результате определены стратегии всех членов антикоалиции, и далее они меняться не будут. На втором этапе члены коалиции стремятся максимизировать суммарный выигрыш коалиции, меняя свои управления. При этом стратегии членов антикоалиции не меняются. В результате определяется значение характеристической функции на этой коалиции. Обозначим $x_{1t}^{NE}, x_{2t}^{NE}, \theta_{1t}^{NE}, \theta_{2t}^{NE}$ стратегии игроков в найденном равновесии Нэша. Тогда характеристическая функция Петросяна–Заккура определяется следующим образом:

– для коалиции из одного центра

$$v(\{0\}) = J_0(x_{1t}^{NE}, x_{2t}^{NE}, 0, 0);$$

– для коалиции из одного агента

$$v(\{1\}) = \max_{x_{1t}} J_1(x_{1t}, x_{2t}^{NE}, \theta_{1t}^{NE}); \quad v(\{2\}) = \max_{x_{2t}} J_1(x_{1t}^{NE}, x_{2t}, \theta_{2t}^{NE});$$

– для коалиции одного агента и центра

$$v(\{0,1\}) = \max_{x_{1t}} J_0(x_{1t}, x_{2t}^{NE}, 0, 0) + J_1(x_{1t}, x_{2t}^{NE}, 0);$$
$$v(\{0,2\}) = \max_{x_{2t}} J_0(x_{1t}^{NE}, x_{2t}, 0, 0) + J_2(x_{1t}^{NE}, x_{2t}, 0);$$

– для коалиции обоих агентов

$$v(\{1,2\}) = \max_{x_{2t}, x_{2t}} (J_1(x_{1t}, x_{2t}, \theta_{1t}^{NE}) + J_2(x_{1t}, x_{2t}, \theta_{2t}^{NE}));$$

– для коалиции обоих агентов и центра

$$v(\{0,1,2\}) = \max_{x_{1t}, x_{2t}} J^C(x_{1t}, x_{2t}).$$

Значения характеристических функций Громовой–Петросяна и Петросяна–Заккура находятся численно путем перебора областей допустимых управлений (2), (4) с некоторым шагом.

6. Результаты имитационных экспериментов

Были проведены имитационные эксперименты, в которых определялись значения разных характеристических функций для различных наборов входных параметров модели. При проведении имитационных экспериментов варьировались величины:

γ от 0,01 до 3 млн руб./(год штук) с шагом 0,05;

D от 5 до 100 млн руб./(год штук) с шагом 2 млн руб./(год штук);

α от 0,01 до 0,8 млн руб./(год штук^2) с шагом 0,01 млн руб./(год штук^2);

$r_{1,2}$ от 0,5 до 50 штук^2 год/млн руб. с шагом 0,5 штук^2 год/млн руб.;

$c_{1,2}$ от 50 до 1000 млн руб./год с шагом 50 млн руб./год;

β от 0,1 до 3 с шагом 0,1;

m от 0,0001 до 0,1 с шагом 0,0005;

$k_{1,2}$ от 0,01 до 0,8 млн руб./(год штук) с шагом 0,01 млн руб./(год штук);

y_0 от 30 до 500 млн руб./год с шагом 20 млн руб./год ;

S_t от 100 до 500 млн руб./год с шагом 50 млн руб./год;

$x_{\max}$ от 100 до 3000 штук с шагом 100 штук.

Таблица 1. Входные данные для численного решения

N	D	r_1	r_2	c_1	c_2	y_0	k_1	k_2	γ	α	β	m
1	200	20	30	500	700	200	0,02	0,4	1	0,2	1	0,03
2	200	60	50	300	400	200	0,03	0,3	1	0,1	0,8	0,03
3	200	20	70	350	200	100	0,04	0,06	0,5	0,3	0,1	0,03
4	200	60	20	200	400	100	0,04	0,03	0,5	0,25	0,5	0,03
5	200	30	10	600	500	200	0,01	0,05	1	0,05	0,3	0,05
6	200	20	50	400	300	200	0,05	0,02	0,5	0,1	1,4	0,05
7	300	40	60	200	500	200	0,12	0,2	1	0,12	0,8	0,05
8	300	20	10	400	300	200	0,1	0,1	1,5	0,15	0,6	0,1
9	300	40	20	500	600	50	0,01	0,03	0,4	0,05	0,7	0,02
10	300	20	10	200	500	50	0,07	0,01	0,1	0,1	1	0,02
11	300	50	30	400	300	50	0,05	0,01	0,3	0,1	0,8	0,01
12	500	20	10	400	300	200	0,03	0,25	0,4	0,2	1	0,03
13	500	10	50	400	200	200	0,07	0,03	0,3	0,2	0,8	0,03
14	500	40	25	200	500	200	0,01	0,03	0,2	0,1	1,2	0,03
15	500	30	50	400	300	200	0,05	0,3	0,1	0,5	1,5	0,03
16	500	20	40	100	500	200	0,2	0,1	0,3	0,3	1	0,03
17	500	15	10	150	100	200	0,1	0,5	0,1	0,4	0,5	0,02
18	200	20	30	450	350	100	0,06	0,04	0,1	0,2	2	0,01
19	200	60	25	500	450	100	0,01	0,03	0,4	0,15	1	0,01
20	200	10	40	400	300	100	0,03	0,02	0,3	0,2	1	0,01

Таблица 2. Значения характеристической функции Петросяна–Заккура

N	$v(\{0\})$	$v(\{1\})$	$v(\{2\})$	$v(\{0,1\})$	$v(\{0,2\})$	$v(\{1,2\})$	$v(\{0,1,2\})$
1	183	25 812	24 275	27 148	26 665	50 250	58 756
2	183	27 287	26 975	28 624	28 350	54 824	60 027
3	91	24 512	25 096	25 684	26 274	49 859	53 185
4	91	25 462	24 737	27 634	26 908	50 571	54 733
5	172	27 200	27 250	28 023	28 079	54 889	62 544
6	172	26 862	27 275	28 116	28 524	54 810	59 429
7	172	42 406	41 537	43 745	42 887	84 216	89 206
8	148	41 487	41 600	42 873	42 986	83 085	88 442
9	47	43 001	42 037	43 140	42 748	85 052	92 185
10	27	42 462	42 075	43 512	42 419	84 650	89 611
11	48	41 975	42 225	43 076	43 320	84 795	89 601
12	183	70 113	70 225	72 360	72 503	141 650	146 967
13	183	70 425	71 525	72 162	73 057	142 060	146 306
14	183	73 056	71 600	73 770	72 817	144 795	149 337
15	183	64 925	65 275	70 129	70 515	132 825	137 793
16	183	70 002	69 056	72 519	71 398	139 075	143 530
17	188	68 300	68 325	71 517	71 601	136 848	140 696
18	97	24 962	26 325	27 083	29 442	51 500	57 034
19	97	26 112	26 175	27 472	27 536	52 561	56 674
20	97	25 125	25 806	27 471	27 651	51 750	56 674

Таблица 3. Значения характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна

N	$v(\{0\})$	$v(\{1\})$	$v(\{2\})$	$v(\{0,1\})$	$v(\{0,2\})$	$v(\{1,2\})$	$v(\{0,1,2\})$
1	183	25 025	25 136	25 968	25 543	50 250	58 756
2	183	27 263	27 412	28 092	27 654	54 824	60 027
3	91	24 311	25 213	24 567	25 378	49 859	53 185
4	91	25 596	24 975	25 886	25 138	50 571	54 733
5	172	27 336	27 412	27 816	27 965	54 889	62 544
6	172	27 258	27 532	27 590	27 987	54 810	59 429
7	172	41 857	42 099	43 074	43 945	84 216	89 206
8	148	41 406	41 576	42 030	42 105	83 085	88 442
9	47	42 680	42 165	42 853	42 376	85 052	92 185
10	27	42 775	41 453	43 863	42 653	84 650	89 611
11	49	42 249	42 364	42 396	42 789	84 795	89 601
12	183	70 675	70 766	71 018	71 341	141 650	146 967
13	183	70 325	71 154	71 615	72 756	142 060	146 306
14	183	72 846	71 881	73 094	72 755	144 795	149 337
15	183	65 264	66 534	66 527	67 812	132 825	137 793
16	183	69 137	68 813	70 453	70 134	139 075	143 530
17	188	68 363	68 349	68 668	68 796	136 848	140 696
18	97	26 203	25 986	25 744	28 143	51 500	57 034
19	97	26 206	26 278	26 428	26 931	52 561	56 674
20	97	25 525	26 145	25 919	26 435	51 750	56 674

Все имитационные эксперименты проводились на компьютере с процессором AMD Ryzen 5 3550H с оперативной памятью 8 Гб на объектно-ориентированном языке программирования C++. Среднее время одного эксперимента составило менее секунды. Во всех проведенных экспериментах значения характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна совпали для всех коалиций.

Значения характеристических функций на различных коалициях в случае входных данных из табл. 1 и $T = 6$, $n = 2$, $S_t = 300$ млн руб./год приведены в табл. 2 (для характеристической функции Петросяна–Заккура) и табл. 3 (для характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна).

На рис. 1–3 приведены выигрыши максимальной коалиции $v(\{0,1,2\}) \times \times 10^{-2}$ в зависимости от значений параметров D, определяющего величину выручки от реализации агентом произведенной им продукции (рис. 1), γ, определяющего выигрыш центра в зависимости от объема инновационного продукта (рис. 2), m – коэффициента снижения инновационного уровня (рис. 3). Графики на рисунках приведены в случае $T = 6$; $n = 2$; $S_t = = 300$ млн руб./год; $r_1 = 60$ штук^2 год/млн руб.; $r_2 = 50$ штук^2 год/млн руб.; $c_1 = 300$ млн руб./год; $c_2 = 400$ млн руб./год; $k_1 = 0{,}04$ млн руб./(год штук); $k_2 = 0{,}4$ млн руб./(год штук); $\beta = 1$; $x_{\max} = 1000$ штук.

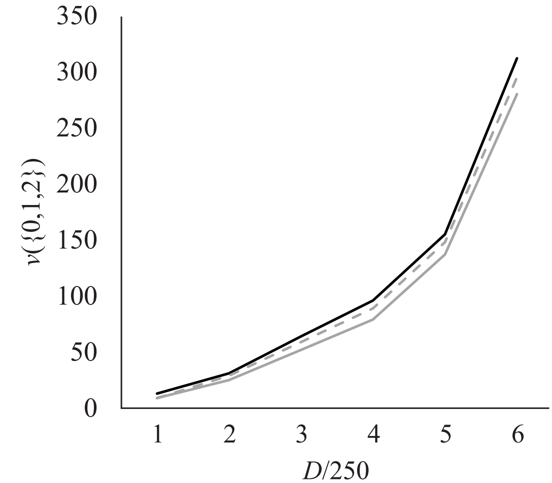

Рис. 1. Зависимость выигрыша максимальной коалиции от параметра D.

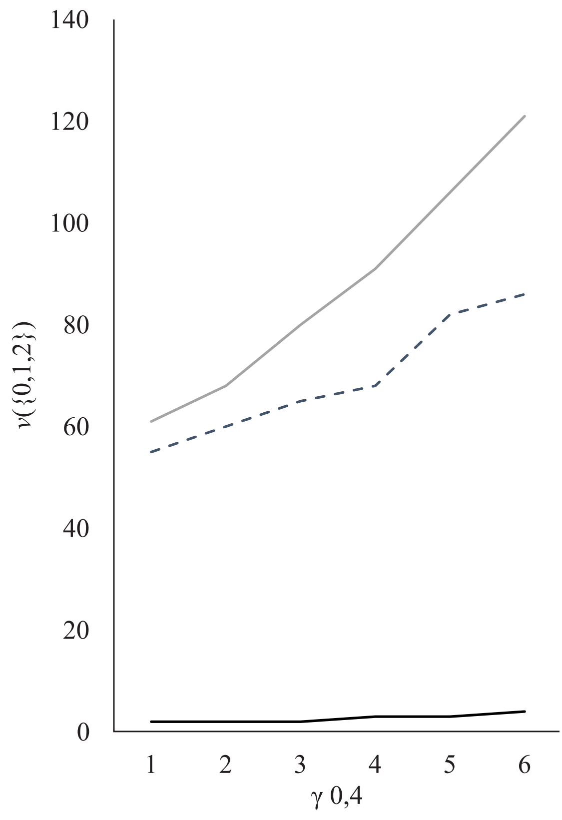

Рис. 2. Зависимость выигрыша максимальной коалиции от параметра γ.

Кроме того, на рис. 1 $m = 0{,}03$; $y_0 = 200$ млн руб./год,
рис. 2 – $\alpha = 0{,}2$ млн руб./(год штук^2); $m = 0{,}03$; $y_0 = 200$ млн руб./год,
рис. 3 – $\alpha = 0{,}2$ млн руб./(год штук^2); $\gamma = 1$ млн руб./(год штук);
$D = 200$ млн руб./(год штук).

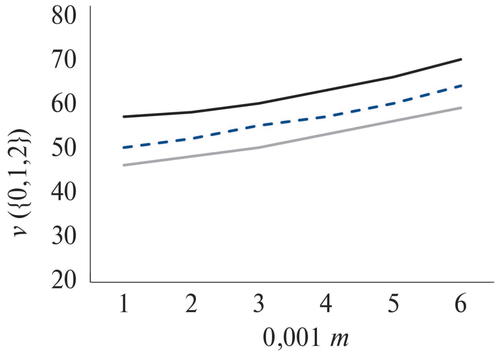

Рис. 3. Зависимость выигрыша максимальной коалиции от параметра m.

Графики на рис. 1 соответствуют случаям:
сплошная тонкая линия – $\gamma = 1$ млн руб./(год штук);
$\alpha = 0{,}2$ млн руб./(год штук^2);
пунктирная – $\gamma = 0{,}5$ млн руб./(год штук);
$\alpha = 0{,}2$ млн руб./(год штук^2);
сплошная жирная – $\gamma = 1$ млн руб./(год штук);
$\alpha = 0{,}1$ млн руб./(год штук^2);
на рис. 2: сплошная жирная линия – $D = 5$ млн руб./(год штук);
пунктирная – $D = 100$ млн руб./(год штук);
сплошная тонкая – $D = 200$ млн руб./(год штук);
на рис. 3: сплошная жирная – $y_0 = 200$ млн руб./год;
пунктирная – $y_0 = 100$ млн руб./год;
сплошная тонкая – $y_0 = 50$ млн руб./год.

На основе анализа результатов проведенных численных экспериментов можно сделать выводы о системе предпочтений с точки зрения значений характеристических функций для разных коалиций:

$$v(\{0\}), v(\{1,2\}) : NM \leftrightarrow GP \leftrightarrow PZ;$$
$$v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{0,1\}), v(\{0,2\}) : NM \leftrightarrow GP < PZ.$$

Здесь приняты обозначения: NM – характеристическая функция Неймана–Моргенштерна; GP – Громовой–Петросяна; PZ – Петросяна–Заккура.

Таким образом, в кооперативной игре на основе характеристической функции для коалиции, состоящей из центра, или коалиции обоих агентов использование разных характеристических функций не меняет их выигрыш. Для коалиций, состоящих из одного агента или центра и одного из агентов, предпочтительнее использование характеристической функции Петросяна–Заккура, разница в получаемых коалициями выигрышах в большинстве случаев не превосходит 5%.

Широко распространенным принципом оптимального распределения выигрыша между игроками в кооперативных играх является вектор Шепли, который всегда существует и единствен [14]. Компоненты вектора Шепли $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$ в случае центра и двух агентов вычисляются следующим образом:

$$\Phi_0 = \frac{1}{3}v(\{0\}) + \frac{1}{6}(v(\{0,1\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{6}(v(\{0,2\}) - v(\{2\}))+$$
$$+\frac{1}{3}(v(\{0,1,2\}) - v(\{1,2\}));$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}(v(\{0,1\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) +$$
$$+\frac{1}{3}(v(\{0,1,2\}) - v(\{0,2\}));$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}(v(\{0,2\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) +$$
$$+\frac{1}{3}(v(\{0,1,2\}) - v(\{0,1\})).$$

Значения компонент вектора Шепли в случае входных данных из табл. 1 для разных характеристических функций приведены в табл. 4. В случае характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна значения вектора Шепли сопадают.

Таблица 4. Значения вектора Шепли для разных характеристических функций

N	Φ_0^{NM}	Φ_1^{NM}	Φ_2^{NM}	Φ_0^{PZ}	Φ_1^{PZ}	Φ_2^{PZ}
1	3517	28 124	27 114	3121	27 896	27 739
2	1246	29 037	28 730	1974	29 099	28 954
3	1514	25 534	26 059	1208	25 560	26 471
4	2141	26 658	26 933	1493	26 972	26 378
5	2899	29 802	29 844	2781	29 757	29 837
6	2012	28 502	28 913	1728	28 682	28 924
7	2152	43 526	43 092	2231	43 559	43 764
8	2297	43 000	43 130	2027	42 979	43 142
9	2533	45 153	44 056	2470	45 123	44 616
10	1895	43 903	43 488	2039	45 359	44 013
11	1994	43 679	43 904	1728	43 817	43 926
12	2587	72 107	72 255	1986	72 337	72 439
13	2021	71 643	72 567	1957	71 843	72 666
14	1897	74 679	73 118	1762	73 456	72 523
15	3458	65 983	66 302	2141	67 188	68 532
16	3097	69 203	70 130	1994	70 933	70 589
17	2427	69 116	69 142	2116	69 562	69 540
18	2750	26 476	28 071	2260	27 632	28 082
19	1857	27 352	27 404	1549	27 583	27 654
20	2372	26 628	27 364	1787	25 650	26 312

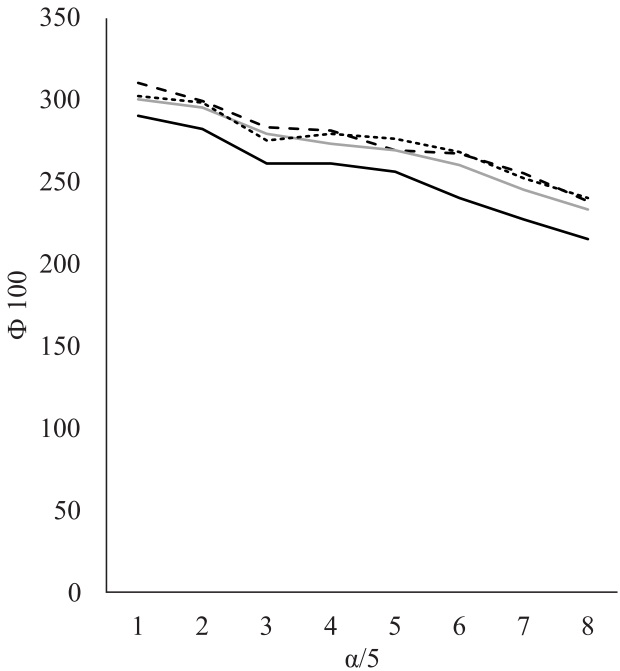

Рис. 4. Зависимость компонент вектора Шепли от α при $D = 200$ млн руб./год шт.

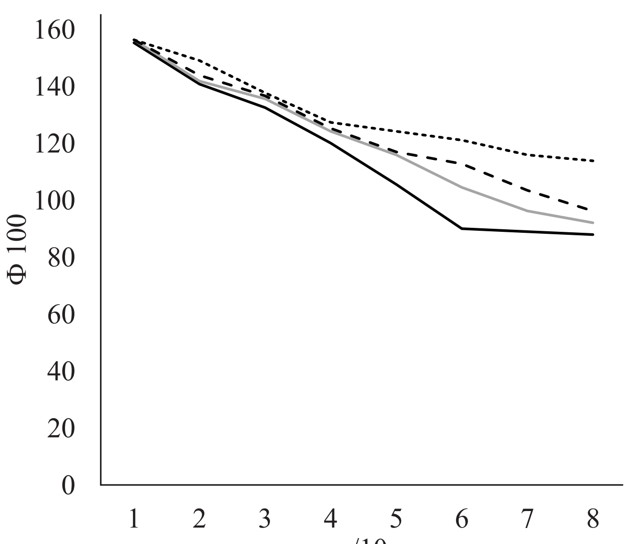

Рис. 5. Зависимость компонент вектора Шепли от α при $D = 100$ млн руб./год шт.

На рис. 4–6 приведены значения компонент вектора Шепли $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$ в зависимости от значений параметра α, влияющего на величину выручки от реализации агентом произведенной им продукции.

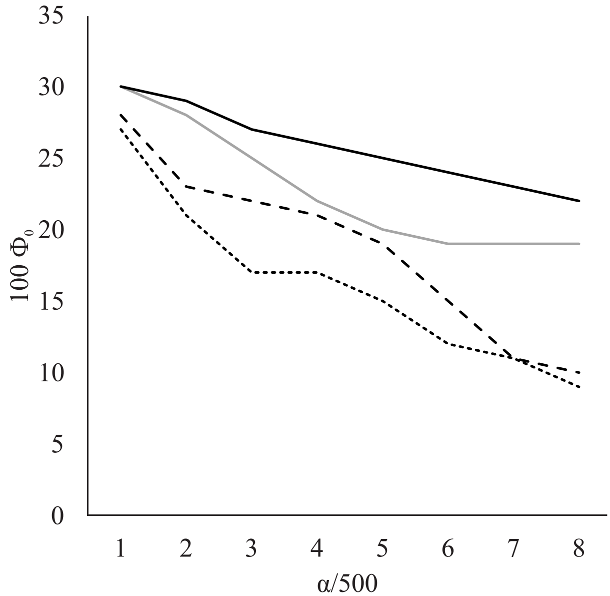

Рис. 6. Зависимость первой компоненты вектора Шепли от α.

Графики на рис. 4–6 приведены в случае

$T = 6$; $n = 2$; $S_t = 300$ млн руб./год; $r_1 = 20$ штук^2 год/млн руб.;

$r_2 = 30$ штук^2 год/млн руб.; $c_1 = 450$ млн руб./год; $c_2 = 350$ млн руб./год;

$k_1 = 0{,}06$ млн руб./(год штук); $k_2 = 0{,}04$ млн руб./(год штук); $\beta = 2$;

$m = 0{,}01$; $y_0 = 100$ млн руб./год; $\gamma = 0{,}1$ млн руб./(год штук);

$x_{\max} = 1000$ штук.

На рис. 4–5 сплошная жирная линия соответствует Φ_1^{PZ}, пунктирная – Φ_2^{NM}, сплошная тонкая – Φ_2^{PZ}, штрихпунктирная – Φ_1^{NM}. На рис. 6 сплошная жирная линия соответствует Φ_0^{NM} при $D = 100$ млн руб./(год штук), пунктирная – при $D = 200$ млн руб./(год штук),
сплошная тонкая – Φ_0^{PZ} при $D = 100$ млн руб./(год штук),
штрихпунктирная – при $D = 200$ млн руб./(год штук).

Отметим, что при малых значениях параметра α отличия при использовании разных характеристических функций незначительны и они растут с ростом α. В общем случае для ведущего игрока в кооперативной игре в форме характеристической функции выгоднее использование характеристических функций Неймана–Моргенштерна или Громовой–Петросяна по сравнению с функцией Петросяна–Заккура. Для агентов такой вывод в общем случае неверен и все определяется входными параметрами модели.

На практике интерес представляет вопрос о том, насколько выгодна кооперация для разных игроков, т.е. насколько больший выигрыш они получают по сравнению с независимым поведением. В табл. 5 в первых шести столбцах приведены выигрыши Центра и агентов при независимом поведении при

Таблица 5. Сравнение выигрышей игроков при независимом и кооперативном поведении для разных характеристических функций

N	Γ_{1t}			Γ_{2t}			NM или GP			PZ		
N	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	$J_0(\%)$	$J_1(\%)$	$J_2(\%)$	$J_0(\%)$	$J_1(\%)$	$J_2(\%)$
1	1370	25 677	25 417	1450	25 475	25 225	243	111	108	215	110	110
2	1280	27 734	27 802	1200	27 612	27 662	104	105	104	165	105	105
3	759	24 543	25 389	767	24 361	25 248	197	105	103	157	105	105
4	701	25 721	23 644	717	25 646	23 375	299	104	105	208	105	113
5	703	27 622	28 104	810	27 386	27 952	358	109	107	343	109	107
6	653	27 454	28 322	670	27 307	27 961	300	104	103	258	105	103
7	1081	42 567	42 037	1070	42 557	42 059	201	102	102	209	102	102
8	928	41 739	42 365	1000	41 518	42 139	230	104	104	203	104	102
9	636	42 911	43 021	670	42 730	42 771	378	105	103	368	106	104
10	654	43 003	42 432	680	42 825	42 275	279	103	103	300	107	104
11	798	42 534	43 211	840	42 300	42 946	237	103	102	206	103	102
12	1012	70 843	71 904	1036	70 735	71 735	250	102	102	191	102	101
13	689	70 896	71 802	707	70 702	71 631	286	101	101	277	102	101
14	579	72 916	72 354	577	72 896	72 348	329	102	102	305	101	101
15	1024	61 367	66 140	1063	65 314	66 160	3257	101	101	201	103	104
16	1008	69 215	69 402	1040	69 188	69 337	298	101	101	192	103	102
17	1993	68 410	68 895	1980	68 412	68 885	123	101	101	107	102	101
18	987	25 675	26 305	980	25 653	26 296	281	103	106	231	101	107
19	745	26 439	26 952	770	26 255	26 755	241	104	102	201	105	103
20	776	25 642	26 219	790	25 575	26 225	300	103	104	226	101	101

решении игр Гермейера Γ_{1t} и Γ_{2t} [13]. В следующих шести столбцах указано, какой процент составляет выигрыш игрока при кооперации для разных характеристических функций по отношению к его выигрышу при независимом поведении в игре Гермейера Γ_{2t}, т.е. насколько в процентном отношении кооперация будет выгоднее для Центра и агентов независимого поведения.

На рис. 7–8 приведены значения выигрышей центра (рис. 7) и одного из агентов (рис. 8) в играх Гермейера Γ_1 (штрихпунктирная линия), Γ_2 (сплошная тонкая линия) и кооперативном поведении для характеристических функций Неймана–Моргенштерна (сплошная жирная линия) и Петросяна–Заккура (пунктирная линия) в зависимости от значений параметра γ (рис. 7) и D (рис. 8). Остальные входные параметры взяты те же, что и для рис. 4–6.

Отметим, что для Центра выигрыш при кооперации может быть как намного больше выигрыша, получаемого при независимом поведении (на 100–200%), так и совсем немного больше (менее 10%). Это определяется входными параметрами модели. Так, при небольших значениях параметра D (при рассмотренных входных данных при $D < 70$), характеризующего спрос на разрабатываемые электронные курсы (при небольшом спросе на электронные курсы), выигрыш всего на 5–15% процентов больше при независимом поведении, а при значительном спросе ($D > 70$) – на 130–230%. Для агентов

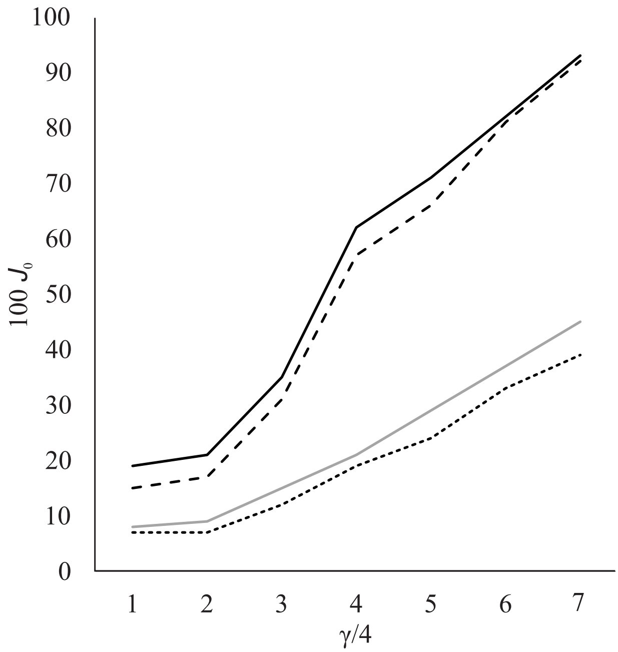

Рис. 7. Выигрыш центра при независимом и кооперативном поведении.

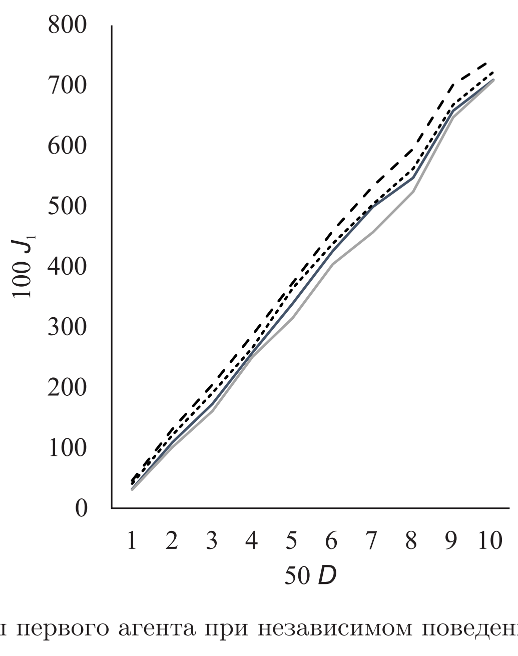

Рис. 8. Выигрыш первого агента при независимом поведении и кооперации.

ситуация аналогичная. Выигрыш при кооперации для достаточно широкого класса входных параметров всего на 1–12% выше, чем при независимом поведении, хотя с уменьшением значения параметра D выигрыш агентов при кооперации становится значительно больше, чем при независимом поведении (на 30–100%). Интересен вывод о том, что кооперация выгоднее для Центра, чем для агентов (в смысле роста его выигрыша), для широкого класса входных параметров. Агенты получают значительно больший выигрыш при кооперации в случае слабого спроса на разрабатываемые курсы, т.е. когда они становятся "слабыми" и зависят от субсидий Центра.

7. Заключение

В кооперативной постановке исследована двухуровневая система управления инновациями в конкурирующих между собой по Курно университетах. Для описания такой системы управления предложена иерархическая (Центр-университеты) разностная модель. Проведено исследование предложенной модели в случае двух агентов в кооперативной постановке с играми в виде характеристических функций Неймана–Моргенштерна, Петросяна–Заккура и Громовой–Петросяна. Дан их сравнительный анализ. Использование характеристической функции Петросяна–Заккура является более выгодным для всех коалиций, в состав которых входят не все агенты. В остальных случаях величины выигрыша коалиции при разных характеристических функциях совпадают.

Для определения выигрышей отдельных субъектов управления используется вектор Шепли. Кооперация выгоднее для Центра, чем для агентов, (в смысле роста его выигрыша) для широкого класса входных параметров. Агенты получают значительно больший выигрыш при кооперации в случае слабого спроса на разрабатываемые курсы. Для Центра в кооперативной игре в форме характеристической функции выгоднее использование характеристических функций Неймана–Моргенштерна или Громовой–Петросяна по сравнению с функцией Петросяна–Заккура.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубина И.Н.* Теоретико-игровые модели организации креативно-инновационной деятельности фирм. АлтГУ. Барнаул, 2013. 178 с.
2. *Топка В.В.* Расширенная модель инновационного проекта при бинарном взаимном воздействии его работ // Проблемы управления. 2019. № 3. С. 22–29.
3. *Ратнер С.В.* Оценка эффективности управления эко-инновациями на основе моделей DEA с лагами и отрицательными выходами // Проблемы управления. 2020. № 5. С. 39–49.
4. *Гусева Н.И., Советкин Я.Д.* Ключевые области внедрения управленческих инноваций в российских и мультинациональных компаниях, действующих на российском рынке // Проблемы управления. 2021. № 2. С. 52–62.
5. *Рослякова Н.А., Волков А.Д., Тишков С.В.* Инновационные системы регионов Российской Арктики: структурные особенности, сценарии развития и аспекты управления (применение методики DEA-анализа) // Управление большими системами. Выпуск 106. М.: ИПУ РАН, 2023. С. 218–245.

6. *Бреер В.В., Мирзоян Г.Л., Новиков Д.А.* Инновационная олигополия Курно // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 45–57.
7. *Cellini R., Lambertini L.* A differential game approach to investment in product differentiation // J. Econom. Dynam. Control. 2002. V. 27(1). P. 51–62.
8. *Cellini R., Lambertini L.* Private and social incentives towards investment in product differentiation // Int. Gam. Theory Rev. 2004. V. 6(4). P. 493–508.
9. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Динамические модели согласования частных и общественных интересов при продвижении инноваций // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. 11(1). С. 96–114.
10. *Malsagov M.Kh., Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* A Differential Stackelberg Game Theoretic Model of the Promotion of Innovations in Universities // Advan. Syst. Sci. Appl. 2020. V. 20(3). P. 166–177.
11. *Мальсагов М.Х., Меркулова М.В., Угольницкий Г.А.* Кооперативные дифференциально-игровые модели управления инновациями // Управление большими системами. 2020. Вып. 85. С. 143–172.
12. *Kalachev V.Yu., Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Difference Stackelberg Game Theoretic Model of Innovations Management in Universities // Contributions to Game Theory and Management. 2022. V. 15. P. 96–108.
13. *Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Динамические модели конфликтов. III. Иерархические игры //АиТ. 2015. № 2. С. 89–106.
14. *Shapley L.S.* A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games II / eds. Luce R.D. and Tucker A.W. Princeton University Press, 1953. P. 307–317.
15. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press, 1953.
16. *Petrosjan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction // J. Econom. Dynam. Control. 2003. V. 27(3). P. 381–398.
17. *Gromova E.V., Petrosyan L.A.* On an Approach to Constructing a Characteristic Function in Cooperative Differential Games // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. P. 1680–1692.
18. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 30.11.2023

После доработки 12.04.2024

Принята к публикации 30.04.2024